SOAL-SOAL LATIHAN TENTANG NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Berny Pebo Tomasouw
(Sabtu, 17 Januari 2015)

"Terbangun pukul 07.00 WIT dan menyadari bahwa belum mendapatkan apapun"
Berpikir sejenak.. Di luar hujan lebat sedang turun.
Daripada hanya diam dan tak melakukan apa-apa, lebih baik menyelesaikan beberapa soal latihan.
Saya memilih soal latihan tentang nilai eigen dan vektor eigen.

A. PENGANTAR

Sebelum memulai, saya ingatkan kembali beberapa hal penting dan mendasar. Dimulai dengan definisi nilai eigen dan vektor eigen dari sebuah matriks.

Definisi 1.

Diberikan matriks $A \in M_n(\mathbb{R})$. Skalar λ disebut nilai eigen dari matriks *A*, jika terdapat vektor tak-nol *x* sedemikian sehingga berlaku

$$Ax = \lambda x \qquad (1)$$

Biasanya, vektor *x* disebut vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen λ.

Dari persamaan (1) bisa diperoleh persamaan karakterisitik atau polinomial karakterisitik, yakni

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad (2)$$

Akar-akar dari persamaan (2) merupakan nilai eigen dari matriks *A*.

Seandainya matriks *A* dan *B* memiliki polinomial karakterisitik yang sama, yakni

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - B)$$

maka jelas bahwa *A* dan *B* memiliki nilai eigen yang sama.

Saya juga ingin ingatkan beberapa sifat dari matriks yang akan membantu dalam menyelesaikan soal.

Teorema 1.

Diberikan matriks *A* dan *B*.

(i). $(A+B)^T = A^T + B^T$.

(ii). $(cA)^T = c(A^T)$.

(iii). $\det(A) = \det(A^T)$.

(iv). $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(v). $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

B. PEMBAHASAN

Soal 1.

Diberikan matriks $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Buktikan bahwa *A* dan A^T memiliki nilai eigen yang sama.

Bukti :

Untuk menunjukkan bahwa *A* dan A^T memiliki nilai eigen yang sama maka saya cukup tunjukkan bahwa *A* dan A^T memiliki polinomial karakteristik yang sama. Pembuktian berikut secara berurutan memanfaatkan Teorema 1 bagian (iii), (i) dan (ii).

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \det\left([\lambda I - A]^T\right) \\ &= \det\left((\lambda I)^T - A^T\right) \\ &= \det\left(\lambda (I)^T - A^T\right) \\ &= \det\left(\lambda I - A^T\right)\end{aligned}$$

Saya telah tunjukkan bahwa $\det(\lambda I - A) = \det\left(\lambda I - A^T\right)$ maka terbukti *A* dan A^T memiliki nilai eigen yang sama.

Soal 2.

Diberikan matriks $A \in M_n(\mathbb{R})$ yang dapat dibalik.

(i). Buktikan bahwa *A* dan A^{-1} memiliki vektor eigen yang sama.

(ii). Apakah *A* dan A^{-1} memiliki vektor eigen yang sama?

Jawab :

(i). Seperti pada soal sebelumnya, saya akan misalkan dahulu bahwa λ adalah nilai eigen dan *x* adalah vektor eigen dari matriks *A*. Selanjutnya dengan memanfaatkan persamaan (1) maka diperoleh

$$\begin{aligned}Ax &= \lambda x \\ A^{-1}(Ax) &= A^{-1}(\lambda x) \\ \left(A^{-1}A\right)x &= \lambda\left(A^{-1}x\right) \\ Ix &= \lambda\left(A^{-1}x\right) \\ x &= \lambda\left(A^{-1}x\right) \\ \frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x \quad &\text{atau} \quad A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x\end{aligned}$$

Bentuk terakhir, yakni $A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$ memperlihatkan bahwa vektor eigen dari *A* dan A^{-1} sama yakni vektor *x*.

(ii). Pembuktian pada bagian (i) di atas memperlihatkan dengan jelas bahwa nilai eigen dari *A* dan A^{-1} tidaklah sama. Nilai eigen dari *A* adalah λ sedangkan nilai eigen dari A^{-1} adalah $\frac{1}{\lambda}$.

Soal 3.

Diberikan matriks $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Buktikan bahwa

(i). Jika $A^2 = O$ maka 0 adalah satu-satunya nilai eigen dari *A*.

(ii). Jika $A^2 = A$ maka 1 atau 0 adalah nilai eigen dari *A*.

<u>Bukti :</u>

(i). Seperti pada soal sebelumnya, saya akan misalkan dahulu bahwa λ adalah nilai eigen dan *x* adalah vektor eigen dari matriks *A*. Selanjutnya dengan memanfaatkan persamaan (1) maka diperoleh

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ A(Ax) &= A(\lambda x) \\ A^2x &= \lambda(Ax) \\ Ox &= \lambda(\lambda x) \\ Ox &= \lambda^2 x \end{aligned}$$

Dari bentuk terakhir, yakni $Ox = \lambda^2 x$ dapat saya katakan bahwa λ^2 adalah nilai eigen dari matrik nol *O*. Di sisi lain, jelas bahwa nilai eigen dari matriks nol adalah 0, sehingga saya bisa peroleh $\lambda^2 = 0$ atau terbukti bahwa $\lambda = 0$.

(ii). Seperti biasa, saya akan misalkan dahulu bahwa λ adalah nilai eigen dan *x* adalah vektor eigen dari matriks *A*. Selanjutnya dengan memanfaatkan persamaan (1) maka diperoleh

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ A(Ax) &= A(\lambda x) \\ A^2x &= \lambda(Ax) \\ Ax &= \lambda(\lambda x) \\ \lambda x &= \lambda^2 x \end{aligned}$$

Dari bentuk terakhir, yakni $\lambda x = \lambda^2 x$ maka saya dapat katakan bahwa $\lambda = \lambda^2$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \lambda &= 0 \\ (\lambda - 1)\lambda &= 0 \end{aligned}$$

Jadi terbukti $\lambda = 1$ atau $\lambda = 0$ adalah nilai eigen dari matriks *A*.

Soal 4.

Diberikan matriks $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Jika λ adalah nilai eigen dari matriks *A* maka buktikan bahwa $c + \lambda$ adalah nilai eigen dari matriks $cI + A$, dimana *c* adalah skalar.

<u>Bukti :</u>

Dengan tanpa mengurangi keumuman maka saya misalkan bahwa matriks *A* dan $cI + A$ memiliki vektor eigen yang sama, yaitu vektor *x*. Selanjutnya, saya bisa peroleh

$$\begin{aligned} (cI + A)x &= cIx + Ax \\ &= cx + Ax \\ &= cx + \lambda x \\ &= (c + \lambda)x \end{aligned}$$

Dari bentuk terakhir, yakni $(cI+A)x=(c+\lambda)x$ maka terbukti bahwa $c+\lambda$ adalah nilai eigen dari matriks $cI+A$.

Soal 5.

Diberikan matriks $A, B\in M_n(\mathbb{R})$ dan P matriks yang dapat dibalik.

Jika $B=P^{-1}AP$ maka buktikan bahwa matriks *A* dan *B* memiliki nilai eigen yang sama.

<u>Bukti :</u>

Seperti pada Soal 1 di atas, saya cukup tunjukkan bahwa *A* dan *B* memiliki polinomial karakteristik yang sama. Pembuktian berikut memanfaatkan Teorema 1 bagian (iv) dan (v).

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda I-B) &= \det\left(\lambda I-P^{-1}AP\right)\\
&= \det\left(\lambda I\left(P^{-1}P\right)-P^{-1}AP\right)\\
&= \det\left(P^{-1}(\lambda I)P-P^{-1}AP\right)\\
&= \det\left(P^{-1}[\lambda I-A]P\right)\\
&= \det\left(P^{-1}\right)\det(\lambda I-A)\det(P)\\
&= \det\left(P^{-1}\right)\det(P)\det(\lambda I-A)\\
&= \frac{1}{\det(P)}\det(P)\det(\lambda I-A)\\
&= \det(\lambda I-A)
\end{aligned}
$$

Dari bentuk terakhir, yakni $\det(\lambda I-B)=\det(\lambda I-A)$ maka terbukti bahwa *A* dan *B* memiliki nilai eigen yang sama.

C. PENUTUP

Mohon maaf jika terdapat kekurangan ataupun kesalahan. Saran dan kritik dapat dikirim ke email saya : bernypebo@yahoo.co.id